Corrigé de l'examen partiel du 09 novembre 2012 (durée : 2h)

Questions de cours (5 points), voir le cours.

Exercice 1. (6 points). *On considère le sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par*

$$A = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M,\ tr(M) = 2,\ det(M) = 0\right\}.$$

1. Donner un exemple de norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On peut par exemple choisir les normes $\|\cdot\|_{max}$ ou $\|\cdot\|_\infty$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit : pour $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$,

$$\|M\|_{max} = \max_{1\le i,j\le 2} |m_{i,j}|, \quad \|M\|_\infty = \max_{1\le i\le 2}\left(\sum_{j=1}^{2} |m_{i,j}|\right).$$

2. Montrer que A est fermé.

On remarque que A s'écrit comme $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, avec

$$A_1 = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\right\}, \quad A_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 2\},$$
$$A_3 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}.$$

Introduisons les fonctions

$$f_1 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \mapsto M -{}^t M,$$
$$f_2 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \mathrm{tr}(M) - 2,$$
$$f_3 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad M \mapsto \det(M).$$

Les composantes de f_1 et les fonctions f_2 et f_3 sont des fonctions polynomiales en les coefficients de M. D'après le cours, les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont par conséquent continues sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque $\{O_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on en déduit, par théorème du cours, que $A_1 = f_1^{-1}(\{O_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\})$, $A_2 = f_2^{-1}(\{0\})$ et $A_3 = f_3^{-1}(\{0\})$ sont fermés. Une intersection (quelconque) de fermés étant un fermé, on conclut que A est fermé.

Autre méthode :

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $M \in A$. Écrivons $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le fait que $M_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ se traduit par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} b_n = c_n \\ a_n + d_n = 2 \\ a_n d_n - b_n c_n = 0. \end{cases}$$

Puisque $\|M_n - M\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$, on a $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ et $d_n \to d$ quand $n \to +\infty$. En passant à la limite dans le système ci-dessus on obtient donc

$$\begin{cases} b = c \\ a + d = 2 \\ ad - bc = 0, \end{cases}$$

autrement dit $M \in A$.

3. Montrer que A est compact.
Comme A est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie (égale à 4), il suffit, par théorème du cours, de démontrer que A est borné.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A$, alors $b = c, a + d = 2$ et $ad - bc = 0$. Donc $ad = b^2 \geq 0$, ainsi a et d sont de même signe. Puisque par ailleurs, $a + d$ est positif, on doit avoir $a \geq 0$ et $d \geq 0$. Il s'ensuit que $a = 2 - d \leq 2$ et $d = 2 - a \leq 2$. On en déduit que $|a| \leq 2$ et $|d| \leq 2$. Puis, on a $b^2 = ad \leq 4$ d'où $|b| = |c| \leq 2$.

Finalement, pour tout $M \in A$ on obtient $\|M\|_\infty \leq 4$ ce qui implique que A est borné.

4. Soit $B = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M,\ det(M) = 0\right\}$. B est-il fermé ? B est-il compact ?
On a $B = A_1 \cap A_3$, où A_1 et A_3 sont définis au 2. et sont fermés, donc B est bien fermé. Montrons que B n'est pas compact. Il suffit de montrer que B n'est pas borné. Considérons la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B définie par $M_n = \begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix}$, alors $\|M_n\|_\infty = 2n \to \infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc B n'est pas borné.

Exercice 2. (2 points) *On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq (1 + \frac{1}{n})\sqrt{|x - y|}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. Montrer que f vérifie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}$.
Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, nous avons $f_n(x) \to f(x)$ et $f_n(y) \to f(y)$ lorsque $n \to +\infty$, par conséquent $|f_n(x) - f_n(y)| \to |f(x) - f(y)|$ lorsque $n \to +\infty$. En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus (qui a lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$) on trouve

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \lim_{n\to+\infty} \left((1 + \frac{1}{n})\sqrt{|x - y|}\right) = \sqrt{|x - y|},$$

d'où l'inégalité souhaitée.

2. En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Attention, l'inégalité trouvée précédemment pour f n'implique pas que f est 1-lipschitzienne, car $\sqrt{|x - y|} \geq |x - y|$ lorsque $|x - y| \leq 1$... Il faut revenir à la définition de l'uniforme continuité. Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. D'après la question précédente, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon^2$.

Exercice 3. (8 points pour questions 1-2-3-4, question 5 en bonus) *On note $E = \mathbb{R}[X]$.*

1. Soit $P = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$ un élément de E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $|P^{(k)}(0)|/k!$ en fonction des coefficients $a_j, 1 \leq j \leq p$. En déduire que la série de terme général $|P^{(k)}(0)|/k!$ converge.
Si P est un polynôme de degré p, $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $k - p$ si $k \leq p$, et est le polynôme nul si $k > p$. Ainsi $|P^{(k)}(0)|/k! = 0$ pour tout $k > p$, ce qui implique que la série de terme général (nul à partir d'un certain rang) $|P^{(k)}(0)|/k!$ converge.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $0 \leq k \leq p$, on a

$$P^{(k)} = \sum_{j=k}^{p} \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k}. \qquad (*)$$

Initialisation : on a

$$P^{(0)} = P = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j = \sum_{j=0}^{p} \frac{j!}{(j-0)!} a_j X^{j-0},$$

$(*)$ est donc vraie pour $k = 0$.

Hérédité : supposons que $(*)$ soit vraie au rang $k < p$. En dérivant cette relation, on trouve

$$P^{(k+1)} = (P^{(k)})' = \sum_{j=k+1}^{p} \frac{j!}{(j-k)!} a_j (j-k) X^{j-k-1} = \sum_{j=k+1}^{p} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j X^{j-(k+1)},$$

donc $(*)$ est vraie au rang $k+1$.

Finalement, posons $X = 0$ dans $(*)$: tous les termes de la somme sont nuls sauf celui correspondant à l'indice j tel que $j - k = 0$, c'est-à-dire le coefficient constant du polynôme $P^{(k)}$. On obtient alors $P^{(k)}(0) = k! a_k$ puis

$$\frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} = |a_k|.$$

On en déduit aussi que

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{p} |a_k|.$$

2. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.

Vérifions que $\|\cdot\|$ vérifie les axiomes de la norme.

(1) Pour tout $P \in E$ on a $\|P\| \geq 0$:

En effet, pour tout $0 \leq k \leq p$ on a $|a_k| \geq 0$ donc $\|P\| = \sum_{k=0}^{p} |a_k| \geq 0$.

(2) Soit $P \in E$ tel que $\|P\| = 0$, alors $P = 0$:

En effet, $\sum_{k=0}^{p} |a_k| = 0$ donc pour tout $0 \leq k \leq p$ on a $|a_k| = 0$ donc $P = 0$.

(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, on a $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$:

En effet, puisque $\lambda P = \sum_{j=0}^{p} (\lambda a_j) X^j$, on déduit de la question précédente que

$$\|\lambda P\| = \sum_{j=0}^{p} |\lambda a_j| = |\lambda| \sum_{j=0}^{p} |a_j| = |\lambda| \|P\|.$$

(4) Soit $(P, Q) \in E^2$, on a $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$.

En effet, supposons sans perte de généralité que $p = \deg(P) \geq \deg(Q)$ et écrivons $P = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$, $Q = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ (les b_j peuvent éventuellement être nuls), de sorte que $P + Q = \sum_{j=0}^{p} (a_j + b_j) X^j$. Par inégalité triangulaire (pour la valeur absolue !) et par linéarité de la somme, il vient

$$\|P + Q\| = \sum_{k=0}^{p} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{p} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=0}^{p} |a_k| + \sum_{k=0}^{p} |b_k| = \|P\| + \|Q\|.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que l'application

$$\Phi_k : (E, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad P \mapsto P^{(k)}(0)$$

est linéaire et continue. Calculer sa norme.

Vérifions rapidement que Φ_k est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P, Q) \in E^2$. Par linéarité de la dérivation,

$$\Phi_k(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)^{(k)}(0) = \lambda P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0) = \lambda \Phi_k(P) + \Phi_k(Q).$$

Montrons que Φ_k est continue. Soit $P \in E$. On a

$$|\Phi_k(P)| = k! \, \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} \leq k! \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|P^{(j)}(0)|}{j!} = k! \|P\|.$$

Puisque Φ_k est linéaire, ceci démontre que Φ_k est continue et que sa norme vérifie $\|\Phi_k\| \leq k!$. On va maintenant démontrer l'inégalité inverse, à savoir $\|\Phi_k\| \geq k!$. Dans ce but, considérons le polynôme $P_k = X^k$. On a $\Phi_k(P_k) = k!$ et $\|P_k\| = 1$. Ainsi $k! = |\Phi_k(P_k)| \leq \|\Phi_k\|\|P_k\| = \|\Phi_k\|$.

Finalement, on obtient $\|\Phi_k\| = k!$.

4. Montrer que l'application $\Phi : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$ est linéaire et n'est pas continue.
On montre comme ci-dessus que Φ est linéaire. Montrons que Φ n'est pas continue. Par l'absurde, supposons que Φ soit continue, c'est-à-dire que $\|\Phi\|$ est fini : pour tout $P \in E$ on a $\|\Phi(P)\| \leq \|\Phi\|\|P\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = X^n$, de sorte que $\|P_n\| = 1$ et $\|\Phi(P_n)\| = n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient $n \leq \|\Phi\|$, ce qui est absurde.

5. Soient $(P, Q) \in E^2$ et

$$A = \left\{ R \in E \mid \forall k \in \mathbb{N},\ R^{(k)}(0) \leq P^{(k)}(0) \right\}, B = \left\{ R \in E \mid \forall k \in \mathbb{N},\ R^{(k)}(0) \geq Q^{(k)}(0) \right\}.$$

a) Montrer que $A \cap B$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.
On remarque que $A \cap B = \cap_{k\in\mathbb{N}} \Phi_k^{-1}([Q^k(0), P^k(0)])$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La question 3. assure que Φ_k est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Par ailleurs, $[Q^k(0), P^k(0)]$ est fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Par théorème du cours, $\Phi_k^{-1}([Q^k(0), P^k(0)])$ est donc fermé dans $(E, \|\cdot\|)$. Puisqu'une intersection de fermés est un fermé, on en déduit que c'est le cas de $A \cap B$.

b) Montrer que $A \cap B$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$.
Soit $R \in A \cap B$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$-|P^{(k)}(0)| - |Q^{(k)}(0)| \leq -|Q^{(k)}(0)| \leq Q^{(k)}(0) \leq R^{(k)}(0) \leq P^{(k)}(0) \leq |P^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|,$$

donc

$$|R^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| \qquad (**)$$

(attention aux valeurs absolues !). En divisant par $k!$ puis en faisant la somme on aboutit à $\|R\| \leq \|P\| + \|Q\|$. R étant un élément arbitraire de $A \cap B$ ceci démontre que $A \cap B$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$.

c) Montrer que $A \cap B$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $p = \deg(P) \geq \deg(Q)$. Soit $R = \sum_{j=0}^{r} c_j X^j$, avec $r = \deg(R) \geq 0$. Supposons que $R \in E$. Soit $k > p$, de sorte que $P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0) = 0$. D'après $(**)$, on a $R^{(k)}(0) = 0 = k!c_k$. Ainsi on a $r \leq p$. Finalement, $A \cap B \subset \mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension finie. $A \cap B$ étant fermé et borné dans $(\mathbb{R}_p[X], \|\cdot\|)$ d'après ce qui précède, on en déduit que $A \cap B$ est compact dans $(\mathbb{R}_p[X], \|\cdot\|)$.